Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath}\ ;\vec{k})$, on considère les points A(0 , -2 , -2) , B(1 , -2 , -4) et C(-1 , -1 , 2)

1 — 1) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ et en déduire que : $2x + 2y + z + 4 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0,5 — 2) On considère la sphère (S) dont une équation est $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$
Vérifier que la sphère (S) a pour centre Ω(1 , 0 , 1) et pour rayon R = 5

0,25 — 3) a) Vérifier que : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC)

0,5 — b) Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC)

0,75 — 4) Vérifier que d(Ω , (ABC))= 3 , puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4 , dont on déterminera le centre

Exercice 2 (3 point) :

0,75 — 1) Résoudre dans l'ensemble ℂ des nombres complexe l'équation : $2z^2 + 2z + 5 = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ,\vec{u}\ ,\vec{v})$, on considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

0,25 — a) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

0,5 — b) On considère le point A d'affixe $a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ et le point B image du point A par la rotation R.
Soit b l'affixe du point B, montrer que : $b = d.a$

3) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et C l'image de B par la translation t et c l'affixe de C

0,75 — a) Vérifier que : $c = b + a$ et en déduire que : $c = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ (on pourra utiliser la question 2)b))

0,75 — b) Déterminer $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ puis en déduire que le triangle OAC est équilatéral

Exercice 3 (3points) :

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : cinq boules rouges portant les nombres 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 et quatre boules blanches portant les nombres 1 ; 2 ; 2 ; 2

On considère l'expérience suivant : on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

Soient les événements :

A : « les trois boules tirées sont de même couleur »

B : « les trois boules tirées portant le même nombre »

C : « les trois boules tirées sont de même couleur et portant le même nombre »

1,5 — 1) Montrer que : $p(A)=\frac{1}{6}$; $p(B)=\frac{1}{4}$ et $p(C)=\frac{1}{42}$

2) On répète l'expérience précédente trois fois avec remise dans l'urne des trois boules tirées après chaque tirage, et on considère la variable aléatoire X qui est égale au nombre de fois de réalisation de l'événement A

0,5 — a) Déterminer les paramètres de la variable aléatoire binomiale X

1 — b) Montrer que : $p(X=1)=\frac{25}{72}$ et calculer $p(X=2)$

Problème (11 points) :

I. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=e^{x}-x^{2}+3x-1$$

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction g

x	$-\infty$	$+\infty$
g'(x)	+	
g(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

0,25 — 1) Vérifier que : $g(0)=0$

0,5 — 2) Déterminer le signe de g(x) sur chacun des intervalles $]-\infty,0]$ et $[0,+\infty[$

II. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x^{2}-x)e^{-x}+x$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ (unité : 1 cm)

0,5 — 1) a) Vérifier que : $f(x)=\frac{x^{2}}{e^{x}}-\frac{x}{e^{x}}+x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

0,75 — b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ puis en déduire (C_f) admet une asymptote (D) au voisinage de $+\infty$ d'équation y = x

0,5 — c) Vérifier que : $f(x)=\frac{x^{2}-x+xe^{x}}{e^{x}}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

0,5 — d) Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ et interpréter le résultat géométriquement

0,25 — 2) a) Montrer $f(x)-x$ et $x^{2}-x$ ont le même signe pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 — b) En déduire que (C_f) est au-dessus de (D) sur chacun des intervalles $]-\infty,0]$ et $[0,+\infty[$, et en dessous de (D) sur l'intervalle [0,1]

0,75 — 3) a) Montrer que : $f'(x)=g(x)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 — b) En déduire que la fonction f décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$

0,25 — c) Dresser le tableau de variations de la fonction f

0,25 — 4) a) Vérifier que : $f"(x)(x^{2}-5x+4)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 — b) En déduire que la courbe (C_f) admet deux points d'inflexion d'abscisses respectives 1 et 4

1 — 5) Construire (D) et (C_f) dans le même repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ (on prend : $f(4)\approx 4{,}2$)

0,5 — 6) a) Montrer que la fonction $H\ :\ x\mapsto(x^{2}+2x+2)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $h\ :\ x\mapsto -x^{2}e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire que : $\int_0^1 x^{2}e^{-x}\,dx=\frac{2e-5}{e}$

0,75 — b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\int_0^1 xe^{-x}\,dx=\frac{e-2}{e}$

0,75 — c) Calculer en cm² l'aire du domaine plan limité par (C_f) et (D) et les droites d'équation : x = 0 et x = 1

III. Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,75 — 1) Montrer que : $0\le u_n\le 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (on pourra utiliser le résultat de la question II)3)b))

0,5 — 2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

0,75 — 3) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite